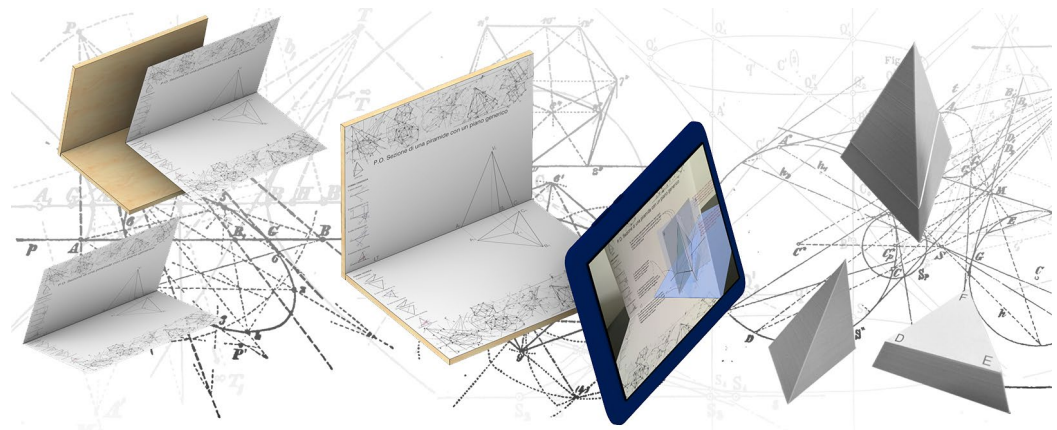
I modelli per la Geometria descrittiva: transizioni tra spazio reale e virtuale

Giovanna Spadafora
Michela Ceracchi
Antonio Camassa

Abstract

La ricerca in corso nasce da alcune riflessioni sull'impatto dell'uso delle tecnologie digitali nell'ambito dell'insegnamento della Geometria Descrittiva e su quale sia, in questo ambito, il giusto bilanciamento tra strumenti digitali e tradizionali. Il convincimento che occorra consolidare, anche attraverso questa disciplina, il rapporto mente-mano e l'attitudine al ragionamento sequenziale, ha portato, nel corso degli anni a integrare nell'esperienza didattica l'uso di modelli fisici e di modelli digitali navigabili. Per superare i limiti oggettivi e percettivi di questi modelli, il gruppo di ricerca ha di recente introdotto nell'insegnamento della disciplina anche l'uso della Realtà Aumentata, mettendo a disposizione degli studenti specifiche applicazioni per l'apprendimento dei problemi di natura spaziale. Le applicazioni di realtà aumentata descritte in questa sede, si inseriscono nella metodologia di insegnamento adottata, configurandosi come un ulteriore tassello all'interno del progetto didattico e si prefiggono l'obiettivo di innescare un maggior coinvolgimento degli studenti nella comprensione dei problemi posti, pur continuando a lavorare perché sviluppino la capacità di astrazione, ovvero la capacità di risolvere alcune operazioni direttamente sul foglio da disegno.

Parole chiave
didattica, geometria descrittiva, intelligenza grafica, spazio proiettivo, realtà aumentata

Esemplificazione delle applicazioni in AR proposte: l'esplorazione dello spazio proiettivo a partire da target bidimensionali e tridimensionali.

doi.org/10.3280/oa-1016-c461

Una riflessione sull'insegnamento della Geometria descrittiva

"Vedo con occhio che sente, sento con mano che vede"
Johann Wolfgang von Goethe

Il dibattito che ruota intorno all'insegnamento della Geometria descrittiva [1], alla necessità che questo si rinnovi adottando, grazie alla possibilità di lavorare all'interno dello spazio digitale, nuove modalità di trasmissione e acquisizione delle conoscenze, è il terreno fertile nel quale ogni ricercatore, in questo ambito, è stimolato a riflettere e a ragionare quotidianamente.
È evidente, tuttavia, che ciascuna esperienza didattica debba essere contestualizzata: il numero di studenti, la loro formazione pregressa, il numero di ore a disposizione e il quadro curricolare [2] contribuiscono senz'altro a orientare le linee da adottare nell'insegnamento. Ma è soprattutto il quotidiano confronto con gli studenti che, anno dopo anno, intraprendono gli studi di architettura e la rapidità con cui le applicazioni relative alle tecnologie dell'informazione e della comunicazione si evolvono a porre, di continuo, pressanti interrogativi su quali siano le modalità di insegnamento che possano corrispondere ai nuovi modi di apprendere delle giovani generazioni. Accanto a questo, le riflessioni relative all'impatto delle tecnologie digitali su tutti gli aspetti della nostra vita, maturate anche in altri settori della cultura, ci spingono a lavorare sul bilanciamento tra strumenti digitali e tradizionali nella formazione.
Rimane, infatti, il convincimento che occorra consolidare, anche attraverso questa disciplina, il rapporto mente-mano (fig. 1) e l'attitudine al ragionamento sequenziale che proprio il lavoro con le mani favorisce [3]. Nel corso degli anni, grazie anche al conforto di alcune esperienze didattiche condotte in passato [Migliari 2001], si è deciso di integrare le modalità di insegnamento e di apprendimento della Geometria descrittiva con l'uso di modelli fisici (fig. 2).
Successivamente, nella didattica frontale è stato introdotto l'uso di modelli virtuali navigabili (fig. 3), in formato pdf 3D, per facilitare ulteriormente gli studenti nella comprensione della corrispondenza tra le operazioni proiettive condotte sul piano e quelle costruite direttamente nello spazio digitale.
Ma non tutti i problemi geometrici possono essere agevolmente spiegati e illustrati attraverso un modello fisico e il modello digitale navigabile, anche se ha il vantaggio di poter essere arricchito dalla costruzione delle operazioni che avvengono nello spazio, può essere osservato soltanto attraverso lo schermo. Per questo motivo il gruppo di ricerca ha avviato,

Fig. 1. Studenti al lavoro per la realizzazione del plastico dell'icosaedro. Esercitazione svolta in collaborazione con Paola Magrone, docente di Istituzioni di Matematica 1. A destra alcuni plastici realizzati dagli studenti, inerenti al ribaltamento di figure appartenenti a piani verticali. Fotografie degli autori.

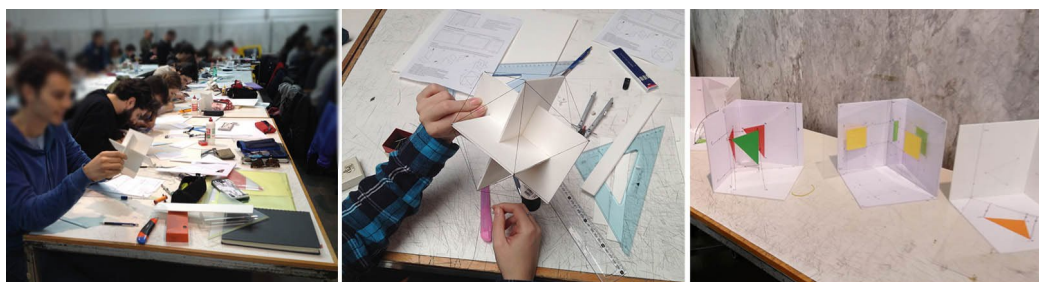



Fig. 2. L'armadio dei modelli per la didattica. A destra, il plastico realizzato per spiegare la genesi spaziale dell'assonometria ortogonale. Studentesse al lavoro. Modelli degli autori.

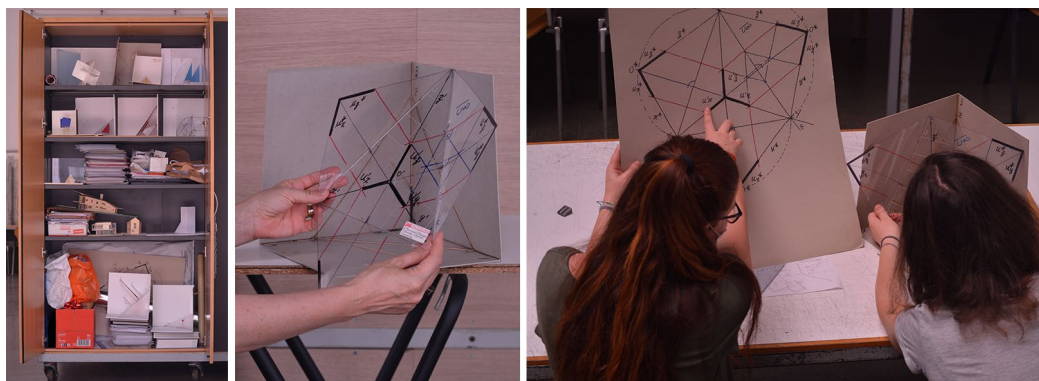



Fig. 3. Le lezioni frontali svolte attraverso il disegno alla lavagna e la contestuale esplorazione dei modelli digitali navigabili.

all'interno del corso di *Fondamenti e applicazioni di Geometria Descrittiva*, una sperimentazione didattica che introduce l'uso della Realtà Aumentata (AR) per visualizzare, nelle tre dimensioni, alcuni specifici problemi. Tuttavia, tali sperimentazioni non sostituiscono bensì integrano le altre modalità utilizzate in questi anni, inerenti all'obiettivo di favorire, negli studenti, lo sviluppo della capacità di astrazione, ovvero la capacità di visualizzare mentalmente le operazioni proiettive da cui derivano le immagini sul piano, configurandosi, pertanto, come un ulteriore tassello all'interno del progetto didattico.

I modelli per la comprensione dello spazio proiettivo

Nel caso del modello fisico, la possibilità di interagire con la sua matericità attiva le intuizioni spaziali [Tallis 2003; Bertolaso, Di Stefano 2017; Sennet 2008, pp. 44-51]. Tuttavia, la fisicità dei modelli rende talvolta molto complessa la rappresentazione di particolari problemi geometrici. Sebbene, infatti, i plastici costruiti ai fini didattici possano essere componibili in modo che la spiegazione o lo studio siano contestualmente supportati dalla interazione con il modello, ci sono casi in cui è difficile replicare, tramite i movimenti degli elementi geometrici nello spazio, l'esatta sequenza delle operazioni grafiche che è necessario svolgere sul foglio. Inoltre, non sempre è possibile rappresentare tutti gli elementi che compongono il problema, come accade, ad esempio, nel caso dei modelli costruiti per spiegare il ribaltamento di un piano generico sul primo piano di proiezione: infatti, nel modello del ribaltamento di un punto (fig. 4) è possibile materializzare e svolgere tutte le operazioni nello spazio, mentre nel ribaltamento della sezione piana di una piramide (fig. 5) la complessità del modello non consente di rappresentare fisicamente tutte le operazioni necessarie per svolgere graficamente il problema. In generale, è comunque evidente che la possibilità di muovere fisicamente anche solo alcuni elementi geometrici aiuti a far comprendere con efficacia ciò che avviene nello spazio.
Va sottolineato che i modelli fisici realizzati per spiegare il processo di costruzione dell'immagine prospettica sul piano di quadro costituiscono un caso particolare tra gli altri. Infatti, oltre a rappresentare gli elementi geometrici e le operazioni che si svolgono nello

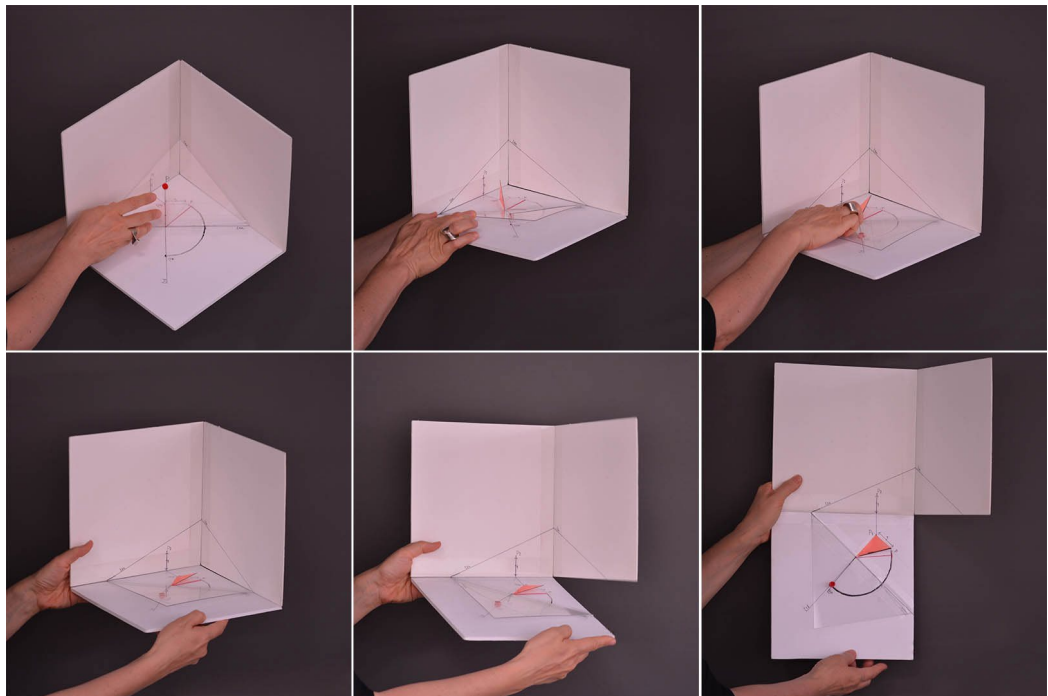



Fig. 4. Il plastico del ribaltamento di un punto appartenente a un piano generico che descrive le operazioni per risolvere il problema, pur se non nella stessa sequenza con cui avvengono sul foglio da disegno. Modello realizzato dagli studenti del corso.

spazio, consentono di sperimentare fisicamente la posizione dell'osservatore e di comprendere come in veduta vincolata l'oggetto scompaia nell'immagine prospettica. Inoltre, tali tipi di modelli, nel replicare il funzionamento di alcune macchine prospettiche (fig. 6), dimostrano il ruolo del modello fisico nel processo di codifica della prospettiva lineare.
Per cercare di superare i limiti oggettivi del modello fisico è possibile realizzare un modello digitale navigabile che, come detto, consente di raffigurare tutti gli enti geometrici e i procedimenti proiettivi, ma che trova il suo limite nella distanza tra lo spazio reale dell'osservatore e lo spazio virtuale in cui il modello può essere esplorato.
Per colmare questa distanza può essere utilizzata la rappresentazione in AR la quale consente di percepire il modello digitale come un oggetto da esplorare nella sua tridimensionalità e non come un'immagine sullo schermo (fig. 7). Inoltre, tale tipo di rappresentazione asseconda la naturale propensione delle attuali generazioni di studenti all'utilizzo e alla comprensione del linguaggio digitale.
Le applicazioni in AR trovano ormai posto in ogni campo di attività. Studi recenti [Russo 2021] sottolineano come l'uso dell'AR nel campo dell'architettura possa aprire a nuove prospettive di ricerca in vari campi di interesse. Dall'analisi della produzione scientifica degli ultimi dieci anni emerge che l'AR è maggiormente utilizzata a scopi divulgativi e per l'ibridazione del patrimonio materiale con quello immateriale [Boboc 2021]. Nonostante tali risultati mostrino che le applicazioni nel settore *educational* siano numericamente inferiori, va rilevato un crescente interesse, da parte di numerosi gruppi di ricerca, verso

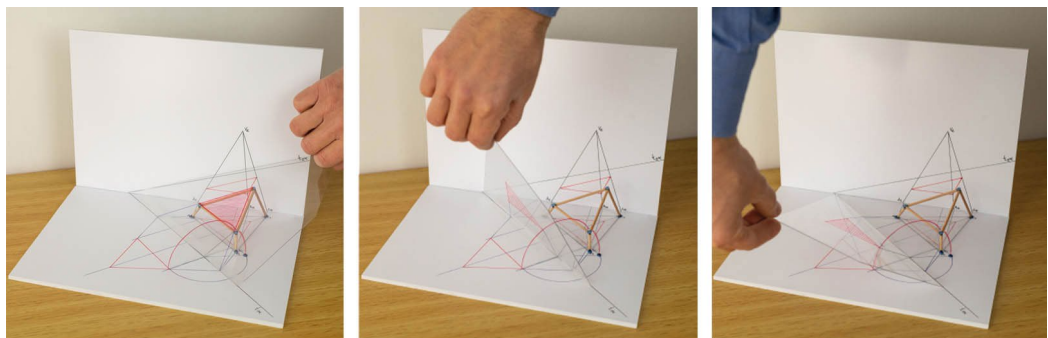



Fig. 5. Ribaltamento della sezione di una piramide con un piano generico. Il tronco di piramide è stato modellato tramite i suoi spigoli per evitare che le facce potessero impedire la vista degli elementi geometrici essenziali. Modello degli autori.

Fig. 6. Il plastico della prospettiva a quadro verticale. Traguardando dal punto di vista, materializzato nella sagoma dell'osservatore, gli studenti possono verificare come l'immagine sul piano di quadro sia il risultato della intersezione della piramide visiva. Modelli degli autori.

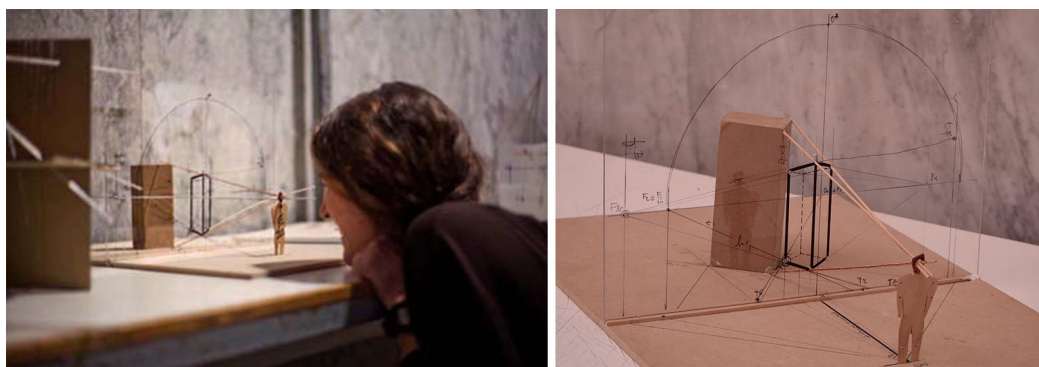
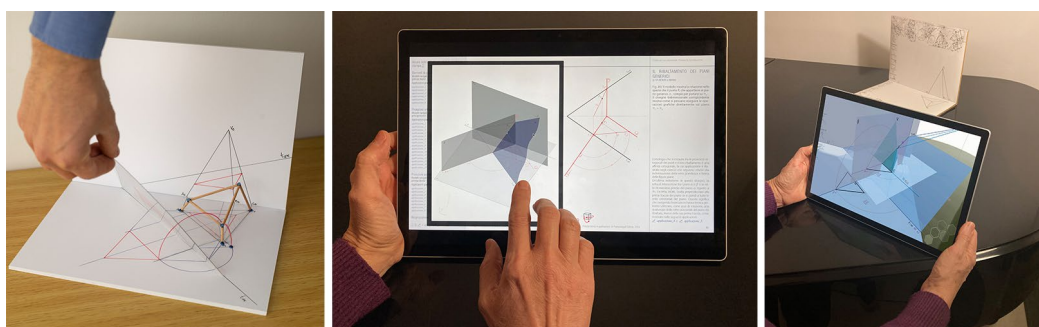



Fig. 7. Il modello fisico, il modello digitale navigabile e il modello in Realtà Aumentata, relativi al ribaltamento di un piano generico. Modello degli autori.

le applicazioni in AR per l'insegnamento sia in ambito architettonico sia nel campo della rappresentazione grafica e della geometria solida [Luigini, Panciroli 2018; Spallone 2021; Ceracchi 2022].

Aumentare la realtà per 'vedere' lo spazio proiettivo

La Geometria descrittiva, pur risolvendosi all'interno del piano della rappresentazione, nasce e vive nello spazio, dove gli elementi proiettivi sono in grado di trasformare l'oggetto nelle sue infinite rappresentazioni. Orseolo Fasolo riteneva che per educare lo studente in questa disciplina occorra esporre, giustificare e capire spazialmente qualsiasi operazione, facendo prevalere la consapevolezza del problema spaziale sulla pura descrizione dei segni piani [Fasolo 1984, p. 29]. L'uso dell'AR che si propone in questa sede mira proprio a 'esporre' quello che avviene nello spazio proiettivo, al fine di stimolare l'autonomia dello studente nella traduzione del problema spaziale in segni grafici (fig. 8).
L'AR può associare il contenuto digitale a un *target* coincidente con una rappresentazione, bidimensionale o tridimensionale, dell'oggetto – attraverso la tecnologia 'marked-based tracking' – e, quando restituisce anche la corretta posizione reciproca tra gli elementi, consente di replicare quello che avviene nello spazio proiettivo – dove il rapporto tra oggetto e rappresentazione è fortemente strutturato [Ugo 2004, p. 23] – e di 'vedere' [4] lo spazio proiettivo sovrapposto allo spazio affine. Nel modello fisico, le relazioni e gli

Fig. 8. L'applicazione in AR e il disegno a mano che ripercorre le fasi del procedimento grafico per la costruzione della sezione di una piramide. Modelli e applicazione in AR a cura degli autori.

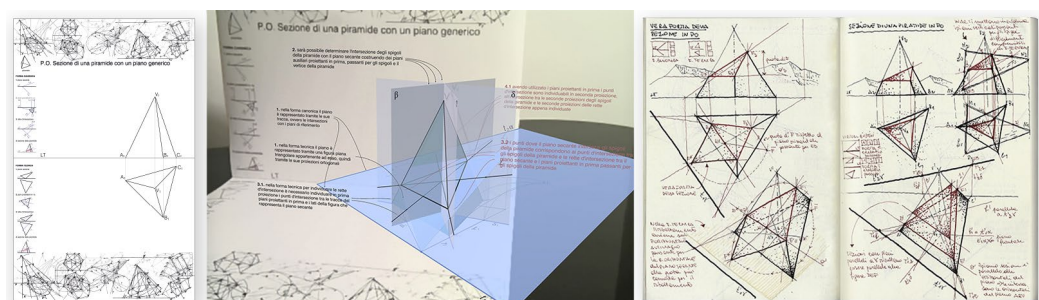



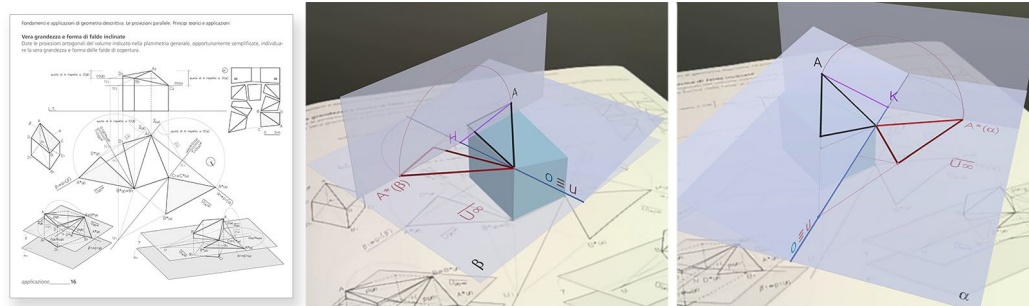
Fig. 9. Il disegno, nel metodo delle doppie proiezioni ortogonali, relativo al ribaltamento delle due falde di copertura di un edificio, e l'applicazione in AR che visualizza, separatamente, nello spazio, i due ribaltamenti. Applicazione in AR a cura degli autori.

elementi proiettanti che esistono nello spazio proiettivo, che possono essere immaginati come entità virtuali essendo inconsistenti nel mondo reale, possono essere materializzati in oggetti concreti. Nel modello digitale navigabile, assimilabile ad una rappresentazione animata [De Rubertis 2006], manca la componente concreta dello spazio affine perché tutto si svolge nello spazio virtuale che è oltre lo schermo. Solo nell'AR può essere rispettata la corrispondenza tra la realtà dello spazio affine e la virtualità dello spazio proiettivo. Nel *target* si possono materializzare, infatti, l'oggetto e le sue rappresentazioni, mentre gli elementi proiettivi rimangono virtuali.
Un altro aspetto che contribuisce a caratterizzare i diversi modelli è la percezione visiva, che è sempre correlata al punto di vista da cui il soggetto guarda l'oggetto [Di Napoli 2004, p. 65]. Guardando un modello fisico esiste una relazione stabile tra il punto di vista, che coincide con l'occhio dell'osservatore, e il movimento attorno all'oggetto. Nel caso del modello digitale navigabile è possibile interagire con il modello orbitando la camera virtuale attorno ad esso ma lo sguardo dell'osservatore rimane fisso sullo schermo. Invece, nelle applicazioni in AR il punto di vista, che genera la rappresentazione virtuale, è l'obiettivo del dispositivo che non coincide con lo sguardo dell'osservatore ma che può rimanere ad esso solidale durante il movimento attorno al *target* [5].
Nelle applicazioni proposte, le componenti che entrano in gioco nell'AR – *target* e contenuto digitale – sono impostate in modo diverso, circostanza che fa assumere all'AR un ruolo ogni volta differente nel processo di comprensione del problema spaziale.
Nella prima applicazione dove il *target* è costituito da un disegno, piuttosto complesso, relativo a operazioni da svolgersi nel metodo delle proiezioni ortogonali, l'AR consente di visualizzare il processo che ha generato quella rappresentazione bidimensionale, svelando quello che avviene 'dentro' e 'dietro' il disegno [6], diventando un ausilio alla comprensione e all'interpretazione dei segni grafici (fig. 9).
Nella seconda applicazione, il *target* corrisponde alla traccia di un problema nelle proiezioni ortogonali e l'AR consente di visualizzare il contenuto digitale della soluzione per fasi progressive, corrispondenti alla successione delle operazioni spaziali e quindi alle fasi di costruzione del modello grafico, configurandosi come una guida nel processo sequenziale del disegno (fig. 10).
Nella terza applicazione, il ribaltamento della sezione piana di una piramide è indagato in AR usando sia *target* bidimensionali (fig. 11) sia *target* tridimensionali (fig. 12), in questo modo è possibile valutare le implicazioni che derivano dal diverso rapporto che si

Fig. 10. La sequenza delle fasi di costruzione della sezione di una piramide con un piano generico appare progressivamente in AR, attivando i *virtual button* tramite l'occlusione degli indicatori predisposti sul *target*. Elaborazione degli autori.

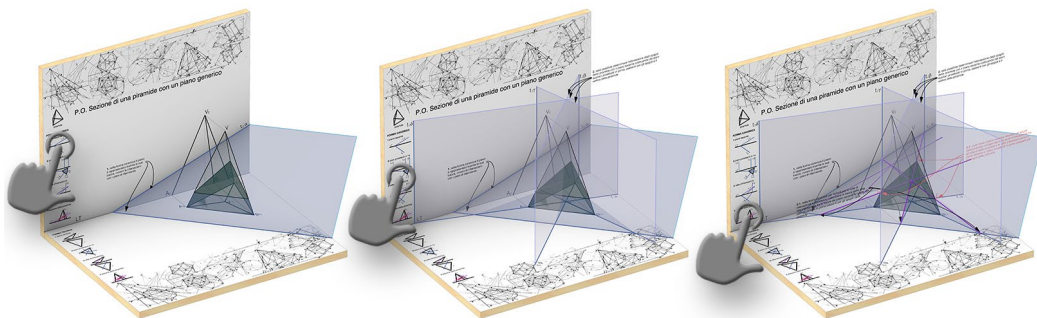
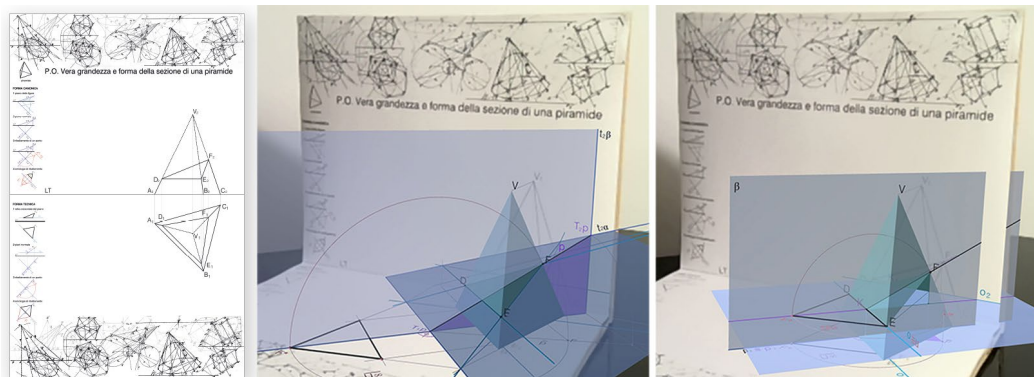
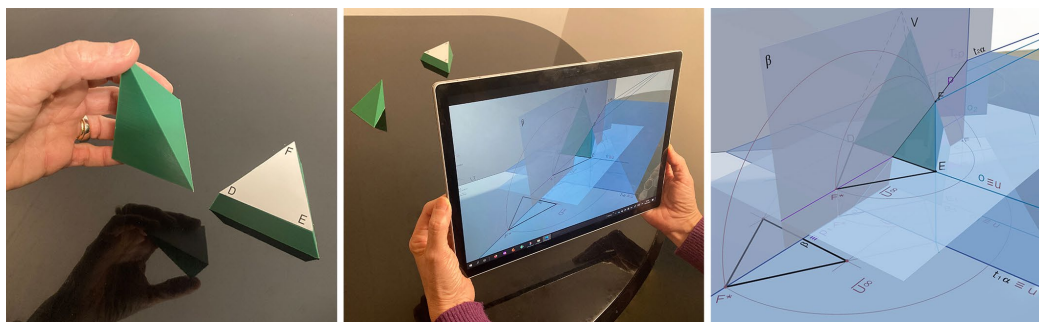



Fig. 11. Il target bidimensionale e l'AR che visualizza la soluzione del problema relativo al ribaltamento della figura piana generata dalla sezione di una piramide con un piano generico, svolto in forma canonica e in forma tecnica. Applicazione in AR a cura degli autori.

instaura tra ciò che viene rappresentato nel *target* – che esiste nel mondo reale – e ciò che viene visualizzato nel mondo virtuale della AR. Il modello digitale in AR si configura, quindi, come una transizione tra lo spazio reale e lo spazio proiettivo, qui rappresentato con tutti gli enti e le relazioni che vi coesistono. Non sarebbe possibile fare altrettanto con il modello fisico – dove è necessario operare delle scelte comunicative che implicano una selezione degli enti e delle relazioni da rappresentare – tuttavia l'applicazione in AR, mettendo in gioco solo il modello grafico e il modello digitale, manca dell'esperienza tattile attraverso la quale è possibile percepire il mondo e quindi conoscerlo [Focillon 2002].
Utilizzando il *target* fisico, invece, l'oggetto reale è rappresentato nella sua consistenza e l'AR può attivare su di esso tutti quegli elementi spaziali che hanno contribuito a dargli forma – come il piano di sezione che genera un tronco di piramide (fig. 12).
Infine, la possibilità di 'vedere' nello spazio l'uso della forma canonica e della cosiddetta forma tecnica [7] sullo stesso modello di partenza fa comprendere la loro sostanziale identità: l'una si sovrappone all'altra. Seppure nella pratica sia indubbiamente più conveniente impiegare la forma tecnica, la comprensione della forma canonica offre allo studente la possibilità di consolidare la propria consapevolezza dell'evento spaziale. L'esercizio mentale che ne deriva favorisce lo sviluppo di quella che può essere definita 'intelligenza grafica' [8].

Conclusioni

Con l'obiettivo di bilanciare l'uso di strumenti tradizionali e informatici nell'insegnamento della Geometria descrittiva, il progetto didattico proposto integra l'uso dei modelli fisici e digitali con applicazioni in AR. Quelle descritte in questa sede sono state concepite come ulteriore supporto agli studenti nella comprensione dei problemi di natura spaziale e nello sviluppo della capacità di astrazione, ovvero della capacità di risolvere, direttamente sul foglio da disegno, le operazioni proiettive che avvengono nello spazio. "La Geometria Descrittiva, è noto, sostituisce ogni figura spaziale (tridimensionale) *F* con una sua figura piana rappresentativa *F'* su un piano π, coincidente con il foglio del disegno" [Fasolo, Migliari 1983]. Tramite queste sperimentazioni si è messo in evidenza

Fig. 12. Il target tridimensionale è il tronco di una piramide sezionata con un piano generico. L'applicazione in AR visualizza il piano secante e il ribaltamento della sezione sovrapponendo i due procedimenti svolti in forma canonica e in forma tecnica. Modelli e applicazione in AR a cura degli autori.

come l'AR segua il percorso inverso: sostituisce ogni rappresentazione (bidimensionale o tridimensionale) dell'oggetto con un suo modello digitale, che è rappresentativo dell'oggetto stesso nello spazio virtuale, coincidente con lo spazio reale.

Note

[1] In un recente articolo, Leonardo Paris [Paris 2020] ripercorre le tappe del processo di rinnovamento della Geometria descrittiva avviato da Riccardo Migliari, affermando che gli esiti di questo processo si sono avuti nella ricerca teorica e applicata ma non nella didattica.

[2] In questo testo si fa riferimento al corso di *Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva*, canale A, svolto nel Dipartimento di Architettura dell'Università Roma Tre. I corsi del primo semestre del primo anno non prevedono l'utilizzo del computer ma si concentrano sul disegno a mano e sull'uso dei modelli fisici. Per una descrizione puntuale del quadro curricolare e dell'approccio didattico adottato da chi scrive, si veda [Spadafora 2020].

[3] Su questo argomento esiste un'ampia bibliografia, in parte riportata a fine testo. Alcune sperimentazioni, in questo senso, sono state condotte anche all'interno del corso di Istituzioni di Matematica 1, sempre nel Dipartimento di Architettura di Roma Tre, dove si è sperimentata la modalità laboratoriale cosiddetta *hands-on*, dedicata alla piegatura della parabola [Magrone, Spreafico 2022, pp.107-108].

[4] Si utilizza il termine 'vedere' distinto dal termine 'guardare" nell'accezione che ne dà Di Napoli: l'uno riguarda l'essenza del mondo, l'altro la sua presenza [Di Napoli 2004, p. 69].

[5] Nel caso della Realtà Mista con occhiali olografici, invece, il punto di vista che genera la rappresentazione virtuale rimane sempre solidale con il punto di vista dell'osservatore.

[6] Cioè, svela ciò che, secondo Orseolo Fasolo, conta più del disegno stesso [Fasolo 1984, p. 153].

[7] Per approfondimenti riguardo alla distinzione tra forma tecnica e forma canonica si veda il testo *Scienza della rappresentazione* [Docci, Migliari 1992] nel quale al capitolo 2 vengono definiti i due diversi modi di approcciare le doppie proiezioni ortogonali e quanto scritto in proposito da Marco Fasolo [Fasolo 2012].

[8] Enrico Cicalò la definisce come la capacità di integrare l'uso di occhio, mente e mano, per risolvere problemi e acquisire nuova conoscenza [Cicalò 2017].

Crediti

Sebbene la ricerca sia stata condotta da tutti gli autori e le conclusioni facciano parte del progetto di ricerca condiviso, il paragrafo 'Una riflessione sull'insegnamento della Geometria Descrittiva' è da attribuire a Giovanna Spadafora, il paragrafo 'I modelli per la comprensione dello spazio proiettivo' è da attribuire ad Antonio Camassa, il paragrafo 'Aumentare la realtà per 'vedere' lo spazio proiettivo' è da attribuire a Michela Ceracchi.

Riferimenti bibliografici

Bertolaso M., Di Stefano N. (a cura di). (2017). *The Hand. Perception, Cognition, Action, Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics,* n. 38. Cham: Springer International.

Boboc R.G., Băutu E., Gîrbacia F., Popovici N., Popovici D.M. (2022). Augmented Reality in Cultural Heritage: An Overview of the Last Decade of Applications. In *Applied Sciences*, n. 12-19: 9859. <https://doi.org/10.3390/app12199859> (consultato il 4 febbraio 2023).

Canciani M., Spadafora G., Saccone M., Camassa A. (2021). Augmented Reality as a Research Tool, for the Knowledge and Enhancement of Cultural Heritage. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (a cura di). *Representation Challenges. Augmented Reality and Artificial Intelligence in Cultural Heritage and Innovative Design Domain*, pp. 241-245. Milano: FrancoAngeli.

Ceracchi M. (2022). The Restoration of Mathematical Cabinets Between Rapid Prototyping and Augmented Reality. Max Brückner's Collection of Polyhedra. In *Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics,* pp. 1040-1051. Cham: Springer International.

Ceracchi M., Tarei G. (2022). The Renewed Existence in AR of Max Brückner's Lost Paper Polyhedra. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (a cura di). *Representation Challenges: New Frontieres of AR and AI Research for Cultural Heritage and Innovative Design,* pp. 433-440. Milano: FrancoAngeli.

Cicalò E. (2017). Intelligenza grafica. In *XY. Studi Sulla Rappresentazione dell'architettura e sull'uso dell'immagine nella scienza e nell'arte,* n. 1(2), pp. 54-67.

De Rubertis R. (2006). Premessa. In L. Nasini, H. Isawi. *Vedere con la mente. Una geometria per comprendere lo spazio senza percepirlo visivamente*, pp. 7-9. Roma: Officina.

Di Napoli G. (2004). *Disegnare e conoscere. La mano, l'occhio, il segno.* Torino: Einaudi.

Docci M., Migliari R. (1992). *Scienza della rappresentazione*. Roma: NIS.

Fasolo M. (2012). La rappresentazione in doppia proiezione ortogonale: forma di Monge e forma tecnica. In L. Carlevaris, L. De Carlo, R. Migliari (a cura di). *Attualità della geometria descrittiva,* pp. 189-200. Roma: Gangemi.

Fasolo O. (1984). *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura, Tomo 1°, I modelli*. Roma: Edizioni Kappa.

Fasolo O., Migliari R. (1983). *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura, Tomo 2°, Linee.* Roma: Edizioni Kappa.

Focillon H. (2002). *Vita delle forme.* seguito da *Elogio della mano.* Torino: Einaudi.

Goethe J.W. (1979). *Elegie romane*, a cura di Roberto Fertonani. Milano: Mondadori. Elegia V, p. 35.

Luigini A., Panciroli C. (2018). *Ambienti digitali per l'educazione all'arte e al patrimonio*. Milano: FrancoAngeli.

Magrone P., Spreafico M.L. (2022). Nuovi approcci nei corsi di Matematica per l'Architettura: connettere forme e formule in geometria attraverso esperienze laboratoriali. In *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, n. 24/2022, pp. 99-122.

Migliari R. (2001). L'insegnamento della Geometria Descrittiva e delle sue applicazioni. In V. Franchetti Pardo (a cura di). *La facoltà di architettura dell'Università di Roma "La Sapienza" dalle origini al duemila. Discipline, docenti, studenti*, pp. 277-288. Roma: Gangemi.

Paris L. (2020). Geometria descrittiva 2020/Descriptive Geometry 2020. In A. Arena, M. Arena, R.G. Brandolino, D. Colistra, G. Ginex, D. Mediati, S. Nucifora, P. Raffa (a cura di). *Connettere. Un disegno per annodare e tessere. Atti del 42° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione*, pp. 772-791. Milano: FrancoAngeli.

Russo M. (2021). AR in the Architecture Domain: State of the Art. In *Applied Sciences*, n. 11-15: 6800. <https://doi.org/10.3390/app11156800> (consultato il 25 gennaio 2023).

Sennet R. (2008). *L'uomo artigiano*, pp. 44-51. Milano: Feltrinelli.

Spadafora G. (2020). Modelli reali e virtuali per l'insegnamento della geometria descrittiva. In *Annali online della Didattica e della Formazione Docente,* n. 20/2020, pp. 125-142.

Spallone R., Palma V. (2021). AR&AI in the Didactics of the Representation Disciplines. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (a cura di). *Representation Challenges. Augmented Reality and Artificial Intelligence in Cultural Heritage and Innovative Design Domain*, pp. 421-425. Milano: FrancoAngeli.

Tallis R. (2003). *The Hand. A Philosophical Inquiry in Human Being*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Ugo V. (2008). *La costruzione geometrica della forma architettonica. Esercizi*. Milano: Maggioli.

Autori
Giovanna Spadafora, Università degli Studi Roma Tre, giovanna.spadafora@uniroma3.it
Michela Ceracchi, Sapienza Università di Roma, michela.ceracchi@uniroma1.it
Antonio Camassa, Consiglio Nazionale delle Ricerche, antonio.camassa@cnr.it

Per citare questo capitolo: Spadafora Giovanna, Ceracchi Michela, Camassa Antonio (2023). I modelli per la Geometria descrittiva: transizioni tra spazio reale e virtuale/Models for Descriptive Geometry: Transitions between Real and Virtual Space. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (a cura di). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 3189-3206.

 Isbn 9788835155119

Models for Descriptive Geometry: Transitions between Real and Virtual Space

Giovanna Spadafora
Michela Ceracchi
Antonio Camassa

Abstract

The current research emerges from reflections on the impact that the use of digital technologies has in teaching Descriptive Geometry and what would be, in this field, the right balance between digital and traditional tools. The conviction that it is necessary to consolidate, even within this discipline, the mind-hand relationship and the propensity for sequential reasoning has, over the years, led to integrating the use of physical and navigable digital models in the teaching environment. In order to overcome the objective and perceptive limits of these models, the research team has also recently introduced, in teaching this discipline, the use of Augmented Reality, thus providing students with specific applications to aid in learning problems regarding spatial relations. The applications of Augmented Reality herein described were adopted in the teaching methodology as an added element within the didactic project, and setting the goal of activating a greater involvement of students in comprehending the problems posed, while continuing to work so that they acquire the ability for abstraction, that is, the ability to solve specific procedures directly on the drawing sheet.

Keywords
Didactics, Descriptive Geometry, Graphic Intelligence, Projective Space, Augmented Reality

Exemplification of the proposed applications in AR: the exploration of projective space from two and three-dimensional targets.

doi.org/10.3280/oa-1016-c461

Reflections on the teaching of Descriptive Geometry

"Sehe mit fühlendem Aug', fühle mit sehender Hand
See with a feeling eye: feel with a seeing hand."
Johann Wolfgang von Goethe

The debate revolving around the teaching of descriptive geometry [1] and the need for it to be modernized by adopting, thanks to the possibility of working within the digital space, new ways of transmitting and acquiring knowledge, is the fertile ground in which every researcher, in this area, is inspired to reflect and reason on a daily basis.
It is clear, however, that every teaching experience must be contextualized: the number of students, their previous training, number of hours available and the curricular framework [2] certainly contribute to steer the direction to be adopted in teaching. But it is above all the daily dialogue with the students who, year after year, undertake architectural studies and the speed with which the applications relating to information and communication technologies evolve that constantly raise pressing questions about what the teaching methods are that can correspond to the younger generations' new ways of learning. Alongside this, the reflections relating to the impact of digital technologies on all aspects of our lives, also achieved in other sectors of culture, prompt us to work on the balance between digital and traditional tools in training. In fact, the belief is still held that it is necessary to consolidate, also through this discipline, the mind-hand relationship (fig. 1) and the aptitude for sequential reasoning that working with the hands privileges [3]. Over the years, also thanks to the support of some teaching experiences acquired in the past [Migliari 2001], it was decided to integrate the teaching and the learning methods of descriptive geometry with the use of physical models (fig. 2).
Subsequently, the use of navigable virtual models was introduced in face-to-face teaching (fig. 3), in 3D pdf format, to further aid students in understanding the correspondence between the projective operations carried out on the plane and those built directly in the digital space.
But not all geometric problems can be easily explained and illustrated through a physical model and the navigable digital model, even if it has the advantage by its capacity to be enriched by constructing the operations that take place in space, even if can only be observed on the monitor. For this reason, the research group has launched, in the course *Fondamenti*

Fig. 1. Students at work on the realization of the model of the icosahedron. Exercise carried out in collaboration with Paola Magrone, professor of Institutions of Mathematics 1. On the right, some models made by the students, related to the revolving of figures belonging to the vertical planes. Photographs by the authors.

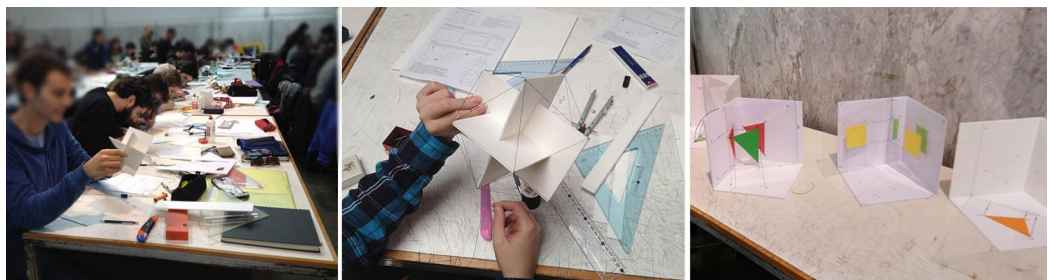



Fig. 2. The cabinet of teaching models. Right, the model created to explain the spatial genesis of orthogonal axonometry. Students at work. Models by the authors.

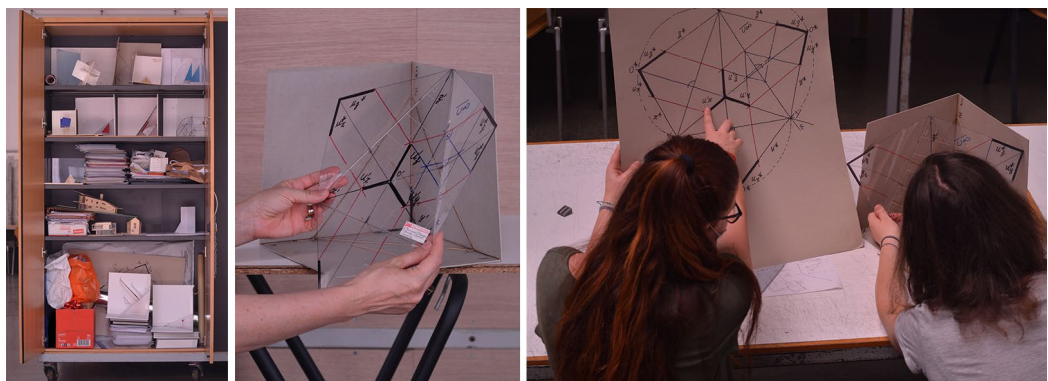



Fig. 3. The face-to-face lessons carried out by drawing on the black-board and the contextual exploration of navigable digital models.

e applicazioni di Geometria Descrittiva, an educational experimentation that introduces the use of Augmented Reality (AR) to visualize some specific problems in three dimensions. However, these experiments do not replace but rather integrate the other methods used in recent years, inherent in the objective of promoting, in students the development of the ability abstraction, that is, the ability to mentally visualize the projective operations from which the images on the plane derive, thus configuring as an additional element within the educational project.

The models for the understanding of projective space

In the case of the physical model, the possibility of interacting with its materiality activates spatial intuitions [Tallis 2003; Bertolaso, Di Stefano 2017; Sennet 2008, p. 44-51]. However, the physical nature of the models sometimes renders the representation of particular geometric problems very complex. Although, in fact, the models built for educational purposes can be made modular so that the explanation or the study are contextually aided by the interaction with the model, there are cases in which is difficult to replicate, following the movements of the geometric elements in space, the exact sequence of graphic operations that must be carried out on the sheet. Furthermore, it is not always possible to represent all the elements contained in the problem, as happens, for example, in the case of models built to explain the rotation of a generic plane onto the first projection plane: in fact, in the model of the revolving of a point (fig. 4) it is possible to materialize and carry out all the operations in space, while in the reversal of the plane section of a pyramid (fig. 5) the complexity of the model does not allow to physically represent all the operations necessary to carry out the problem graphically. In general, however, it is evident that the possibility of physically moving even only a few geometric elements helps to effectively understand what is happening in space.
It should be emphasized that the physical models created to explain the process of constructing the perspective image onto the picture plane constitute a particular case among others. In fact, in addition to representing the geometric elements and the operations that take place in space, they allow one to physically experience the position of the observer

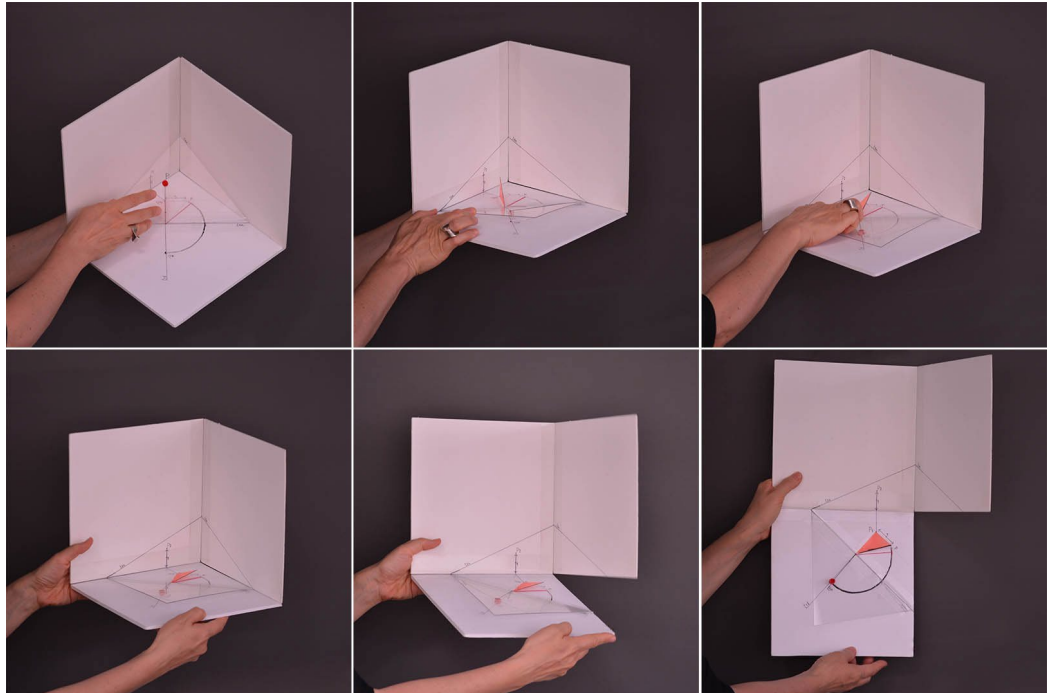



Fig. 4. The model of the revolution of a point belonging to a generic plane which describes the operations to solve the problem, even if not in the same sequence as they occur on the drawing on paper. Model created by the students of the course.

and understand how in a constrained view the object disappears in the perspective image. Furthermore, these types of models, by replicating the functioning of some perspective machines (fig. 6), demonstrate the role of the physical model in the process of codifying the linear perspective.
To attempt to overcome the objective limits of the physical model, it is possible to create a navigable digital model which, as stated, allows us to depict all the geometric entities and projective processes, but which finds its limit in the distance between the observer's real space and the virtual space within which the model can be explored.
To bridge this distance, AR representation can be used, which allows the digital model to be perceived as an object to be explored in its three-dimensionality and not as an image on the screen (fig. 7). Furthermore, this type of representation is more adapted to the natural propensity of the current generations of students' use and understanding of digital language.
Applications in AR now find a place in every field of activity. Recent studies [Russo 2021] emphasize how the use of AR in the field of architecture can open up new research perspectives in various areas of interest. From the analysis of the scientific production of the last ten years it emerges that AR is mostly used for dissemination purposes and for the cross-breeding material with immaterial heritage [Boboc 2021]. Although these results show that applications in the educational sector are numerically fewer, there is a growing interest, on the part of numerous research groups, towards AR applications for teaching both in the architectural field and in the field of graphic representation and solid geometry [Luigini, Panciroli 2018; Shoulder 2021; Ceracchi 2022].

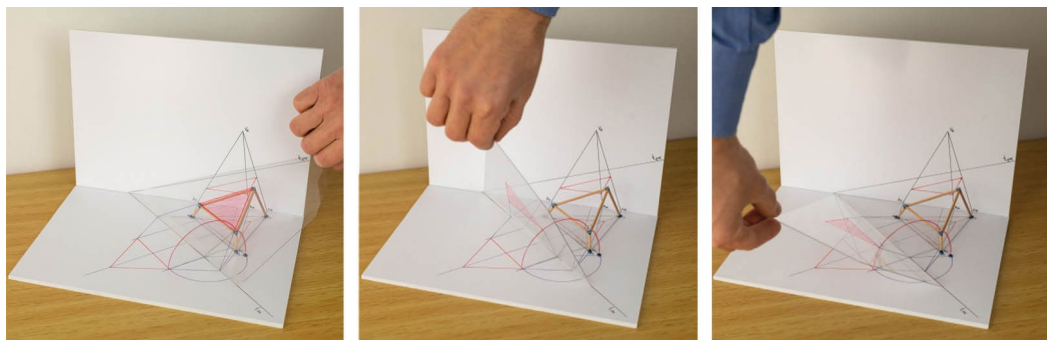



Fig. 5. Revolving the generic plane that sections a pyramid. The truncated pyramid was modeled with its edges to prevent the faces from obstructing the view of the essential geometric elements. Model by the authors.

Fig. 6. The model of the vertical frame perspective. Sighting from the point of view, materialized as the silhouette of the observer, the students can verify how the image on the picture plane is the result of the intersection of the visual pyramid. Model by the authors.

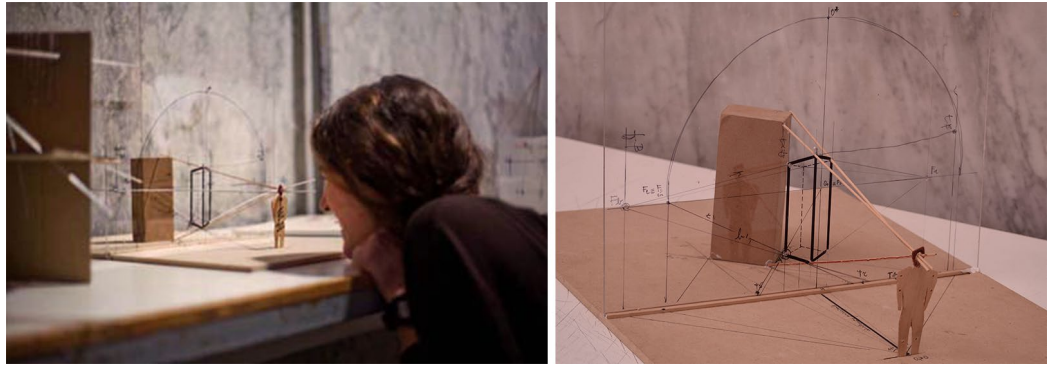
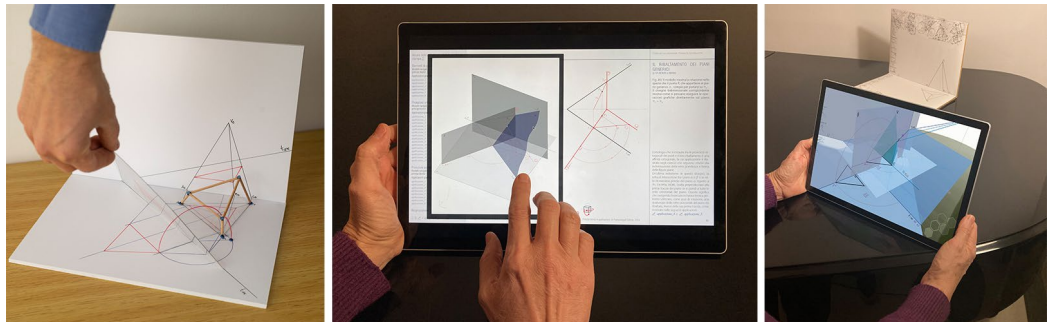



Fig. 7. The physical model, the navigable digital model and the Augmented Reality model, related to the rotation of a generic plan. Models by the authors.

Augment reality to see projective space

Descriptive geometry, though resolved within the representational plane, is born and lives in space, where the projective elements are able to transform the object into its infinite representations. Orseolo Fasolo believed that to educate the student in this discipline it is necessary to explain, justify, and spatially understand any operation, so that the awareness of the spatial problem prevails over the pure description of flat signs [Fasolo 1984, p. 29]. The use of AR proposed here aims precisely at exhibiting what happens in the projective space, in order to stimulate the student's autonomy in translating the spatial problem into graphic signs (fig. 8).
AR can associate the digital content with a target coinciding with a two-dimensional or three-dimensional representation of the object – through marked-based tracking technology – and, when it also returns the correct reciprocal position among the elements, it permits the replication of what takes place in the projective space – where the relationship between object and representation is strongly structured [Ugo 2004, p. 23] – and to 'see' [4] the projective space superimposed onto the affine space.
In the physical model, the relationships and projecting elements that exist in the projective space, which can be imagined as virtual entities though being inconsistent in the real world, can be materialized into concrete objects. In the navigable digital model, similar to an animated representation [De Rubertis 2006], the concrete component of the related space

Fig. 8. The application in AR and the hand drawing that traces the phases of the graphic procedure for the construction of the section of a pyramid. Models and application in AR by the authors.

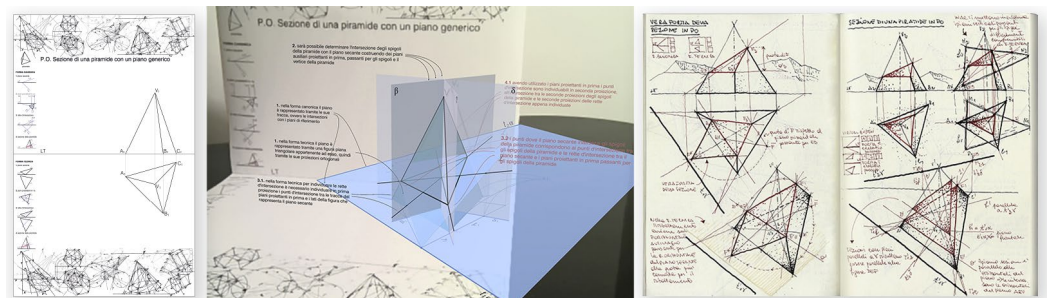
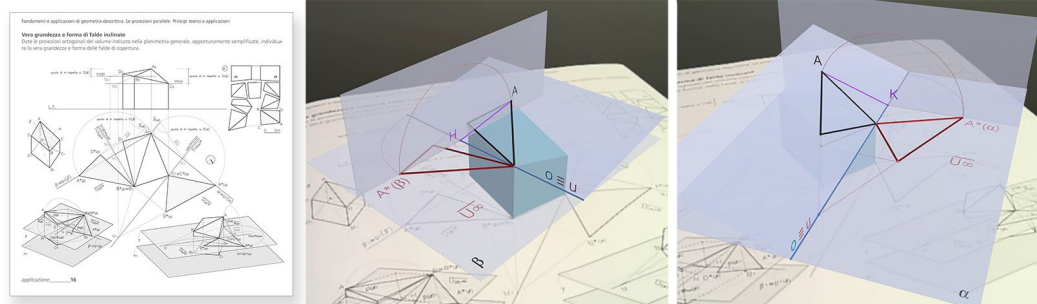



Fig. 9. The drawing, in the method of double orthogonal projections, related to the revolving of the two roof pitches of a building, and the application in AR which, separately, visualizes in space, the two rotations. Application in AR by the authors.

is missing because everything takes place in the virtual space that is on the other side of the screen. Only in AR can the correspondence between the reality of affine space and the virtuality of projective space be respected. In fact, the object and its representations can materialize in the target, while the projective elements remain virtual.
Another aspect that helps to characterize the different models is visual perception, which is always correlated with the point of view from which the subject looks at the object [Di Napoli 2004, p. 65]. Looking at a physical model there is a stable relationship between the point of view, which coincides with the eye of the observer, and the movement around the object. In the case of the navigable digital model, it is possible to interact with the model by orbiting the virtual camera around it but the observer's view remains fixed on the screen. Instead, in AR applications, the point of view, which generates the virtual representation, is the lens of the device which does not coincide with the observer's gaze, but which can remain linked to it during movement around the target [5].
In the proposed applications, the components that come into play in the AR – target and digital content – are set up differently, a situation that makes AR assume a different role each time in the process of understanding the spatial problem.
In the first application where the target consists of a (rather complex) drawing relating to operations to be carried out with the method of orthogonal projections, the AR makes it possible to visualize the process that generated the two-dimensional representation, revealing what is happening 'inside' and 'behind' the drawing [6], becoming an aid to the understanding and interpretation of the graphic signs (fig. 9).
In the second application, the target corresponds to the trace of a problem in orthogonal projections and AR allows the digital content of the solution to be displayed in progressive phases, corresponding to the succession of spatial operations and therefore to the construction phases of the graphic model, amounting to a guide in the sequential drawing process (fig. 10).
In the third application, the rotation of the flat section of a pyramid is investigated in AR using both two-dimensional (fig. 11) and three-dimensional targets (fig. 12), in this way it is possible to evaluate the implications deriving from the different relationship that is established between what is represented in the target – which exists in the real world – and what is displayed in the virtual world of AR. The digital model in AR is therefore configured as a transition between real space and projective space, represented here with all the entities and relationships that coexist therein. It would not be possible to do the same with

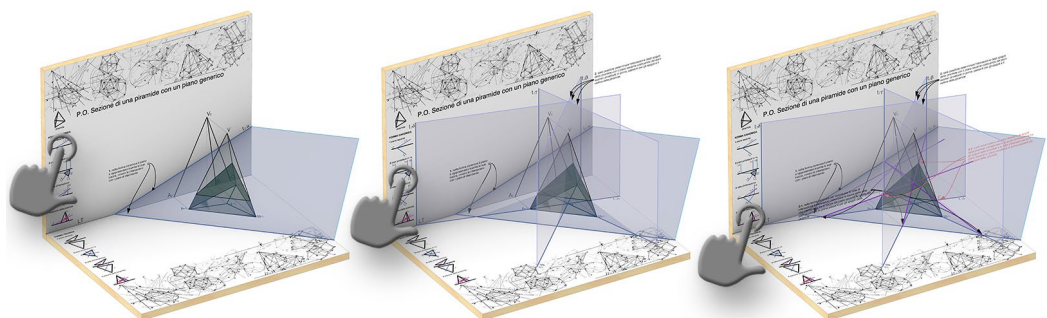
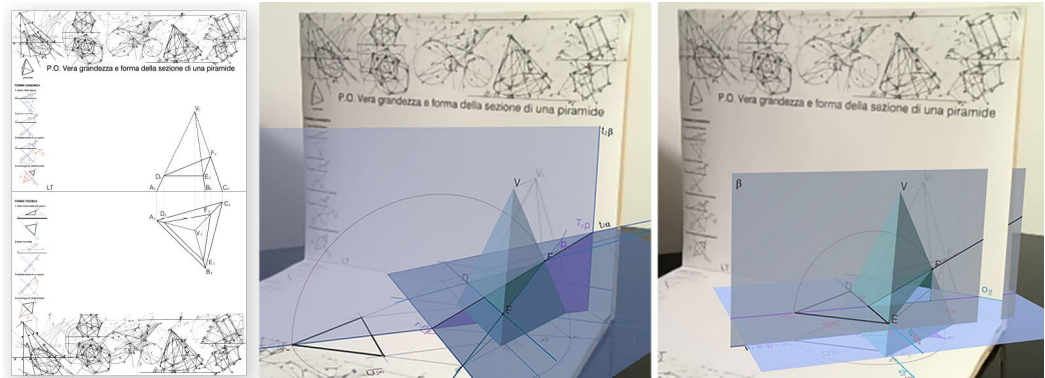
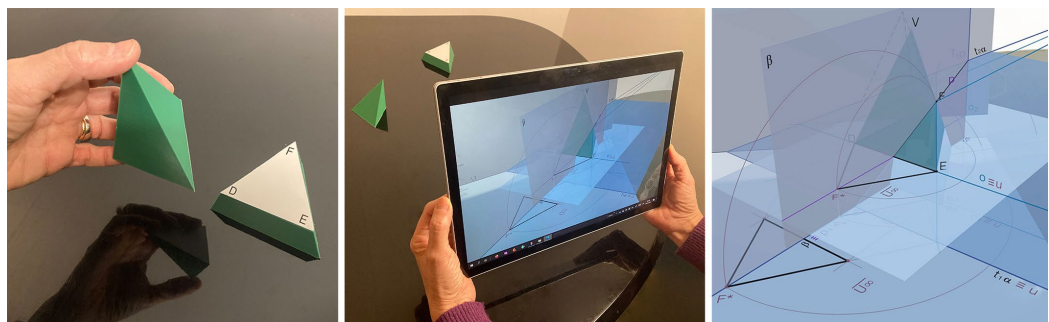



Fig. 10. The sequence of construction phases of the section of a pyramid with a generic plan appears progressively in AR, activating the virtual buttons by blocking the indicators set up on the target. Elaboration by the authors.

Fig. 11. The two-dimensional target and the AR which displays the solution of the problem related to the revolution of the plane figure generated by the section of a pyramid with a generic plane, carried out in canonical and technical form. Application in AR by the authors.

the physical model – where it is necessary to make communicative choices that involve a selection of the elements and the relationships to be represented – however the application in AR, by bringing into play only the graphic model and the digital model, lacks the tactile experience through which it is possible to perceive the world and therefore know it [Focillon 2002].
Using the physical target, on the other hand, the real object is represented in its consistency and AR can activate on it all those spatial elements that have contributed to giving it shape – such as the sectional plane that generates a truncated pyramid (fig. 12).
The possibility of 'seeing' in space the use of the canonical form and the so-called technical form [7] on the same starting model helps us understand their substantial identity: one overlaps the other. Although in practice it is undoubtedly more convenient to use the technical form, the understanding of the canonical form offers the student the possibility of consolidating his awareness of the spatial event. The resulting mental exercise favors the development of what may be defined as 'graphical intelligence' [8].

Conclusions

With the aim of balancing the use of traditional and IT tools in teaching descriptive geometry, the proposed educational project integrates the use of physical and digital models with applications in AR. Those described here have been conceived as a further support to students in understanding spatial problems and in developing the ability to abstract, that is, to solve, directly on the drawing paper, the projective operations that take place in space.
"Descriptive Geometry, it is known, replaces each (three-dimensional) spatial figure *F* with its representative plane figure *F'* on a plane π, coinciding with the drawing sheet" [Fasolo, Migliari 1983]. Through these experiments it was emphasized how AR follows the opposite path: it replaces each (two or three-dimensional) representation of the object with its own digital model, which is representative of the object itself in virtual space, coinciding with real space.

Fig. 12. The three-dimensional target is the truncated pyramid sectioned by a generic plane. The application in AR displays the secant plane and the revolution of the section by superimposing the two procedures carried out in a canonical form and in a technical form. Models and application in AR by the authors.

Notes

[1] In a recent article, Leonardo Paris [Paris 2020] retraces the stages of the modernization process of descriptive geometry begun by Riccardo Migliari, stating that the results of this process occurred in theoretical and applied research but not in teaching.

[2] In the text we refer to the course of *Fondamenti e Applicazioni di Geometria Descrittiva*, channel A, held in the Department of Architecture of the Roma Tre University. The courses in the first semester of the first year do not involve the use of computers but focus on hand drawing and the use of physical models. For a detailed description of the curricular framework and the teaching approach adopted by the writer, see [Spadafora 2020].

[3] There is an extensive bibliography on this topic, some of which are included at the end of the text. Some experiments, in this sense, were also conducted within the Institutions of Mathematics 1 course, again in the Department of Architecture of Roma Tre, where the so-called hands-on laboratory method was experimented, dedicated to the folding of the parabola [Magrone, Spreafico 2022, pp.107-108].

[4] The term 'seeing' is used as opposed to the term 'looking' in the meaning given by Di Napoli: one concerns the essence of the world, the other its presence [Di Napoli 2004, p. 69].

[5] In the case of Mixed Reality with holographic glasses, on the other hand, the point of view that generates the virtual representation always remains linked with the point of view of the observer.

[6] That is, it reveals what, according to Orseolo Fasolo, is more important than the drawing itself [Fasolo 1984, p. 153].

[7] For further information on the distinction between technical form and canonical form, see the text *Scienza della rappresentazione* [Docci, Migliari 1992] in which *Chapter* 2 defines the two different ways of approaching double orthogonal projections and what Marco Fasolo wrote concerning it [Fasolo 2012].

[8] Enrico Cicalò defines it as the ability to integrate the use of eye, mind, and hand, to solve problems and acquire new knowledge [Cicalò 2017].

Credits

Although the research was conducted by all the authors and the conclusions are part of the shared research project, the paragraph 'Reflections on the teaching of Descriptive Geometry' is to be attributed to Giovanna Spadafora, the paragraph 'The models for the understanding of projective space' is to be attributed to Antonio Camassa, the paragraph 'Augment Reality to see projective space' is to be attributed to Michela Ceracchi.

References

Bertolaso M., Di Stefano N. (Eds.). (2017). *The Hand. Perception, Cognition, Action, Studies in Applied Philosophy, Epistemology and Rational Ethics*, No. 38. Cham: Springer International.

Boboc R.G., Băutu E., Gîrbacia F., Popovici N., Popovici D.M. (2022). Augmented Reality in Cultural Heritage: An Overview of the Last Decade of Applications. In *Applied Sciences*, No. 12-19: 9859. <https://doi.org/10.3390/app12199859> (accessed 4 February 2023).

Canciani M., Spadafora G., Saccone M., Camassa A. (2021). Augmented Reality as a Research Tool, for the Knowledge and Enhancement of Cultural Heritage. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (Eds.). *Representation Challenges. Augmented Reality and Artificial Intelligence in Cultural Heritage and Innovative Design Domain*, pp. 241-245. Milan: FrancoAngeli.

Ceracchi M. (2022). The Restoration of Mathematical Cabinets Between Rapid Prototyping and Augmented Reality. Max Brückner's Collection of Polyhedra. In *Proceedings of the 20th International Conference on Geometry and Graphics,* pp. 1040-1051. Cham: Springer International.

Ceracchi M., Tarei G. (2022). The Renewed Existence in AR of Max Brückner's Lost Paper Polyhedra. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (Eds.). *Representation Challenges: New Frontieres of AR and AI Research for Cultural Heritage and Innovative Design*, pp. 433-440. Milan: FrancoAngeli.

Cicalò E. (2017). Intelligenza grafica. In *XY. Studi Sulla Rappresentazione dell'architettura e sull'uso dell'immagine nella scienza e nell'arte*, No. 1(2), pp. 54-67.

De Rubertis R. (2006). Premessa. In L. Nasini, H. Isawi. *Vedere con la mente. Una geometria per comprendere lo spazio senza percepirlo visivamente*, pp. 7-9, Rome: Officina.

Di Napoli G. (2004). *Disegnare e conoscere. La mano, l'occhio, il segno.* Turin: Einaudi.

Docci M., Migliari R. (1992). *Scienza della rappresentazione*. Rome: NIS.

Fasolo M. (2012). La rappresentazione in doppia proiezione ortogonale: forma di Monge e forma tecnica. In L. Carlevaris, L. De Carlo, R. Migliari (Eds.). *Attualità della geometria descrittiva*, pp. 189-200. Rome: Gangemi.

Fasolo O. (1984). *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura, Tomo 1°, I modelli.* Rome: Edizioni Kappa.

Fasolo O., Migliari R. (1983). *Fondamenti geometrici della rappresentazione progettuale e tecnica dell'architettura, Tomo 2°, Linee*. Rome: Edizioni Kappa.

Focillon H. (2002). *Vita delle forme.* seguito da *Elogio della mano.* Turin: Einaudi.

Goethe J.W., (1979). *Elegie romane*, a cura di Roberto Fertonani. Milan: Mondadori. Elegia V, p. 35.

Luigini A., Panciroli C. (2018). *Ambienti digitali per l'educazione all'arte e al patrimonio*. Milan: FrancoAngeli.

Magrone P., Spreafico M.L. (2022). Nuovi approcci nei corsi di Matematica per l'Architettura: connettere forme e formule in geometria attraverso esperienze laboratoriali. In *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, No. 24/2022, pp. 99-122.

Migliari, R. (2001). L'insegnamento della Geometria Descrittiva e delle sue applicazioni. In V. Franchetti Pardo (Ed.). *La facoltà di architettura dell'Università di Roma "La Sapienza" dalle origini al duemila. Discipline, docenti, studenti*, pp. 277-288. Rome: Gangemi.

Paris L. (2020). Geometria descrittiva 2020/Descriptive Geometry 2020. In A. Arena, M. Arena, R.G. Brandolino, D. Colistra, G. Ginex, D. Mediati, S. Nucifora, P. Raffa (Eds.). *Connecting. Drawing for weaving relationships. Proceedings of the 42th International Conference of Representation Disciplines Teachers*, pp. 772-791. Milan: FrancoAngeli.

Russo M. (2021). AR in the Architecture Domain: State of the Art. In *Applied Sciences*, n. 11-15: 6800. <https://doi.org/10.3390/app11156800> (accessed 25 January 2023).

Sennet R. (2008). *L'uomo artigiano*, pp. 44-51. Milan: Feltrinelli.

Spadafora G. (2020). Modelli reali e virtuali per l'insegnamento della geometria descrittiva. In *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, No. 20/2020, pp. 125-142.

Spallone R., Palma V. (2021). AR&AI in the Didactics of the Representation Disciplines. In A. Giordano, M. Russo, R. Spallone (Eds.). *Representation Challenges. Augmented Reality and Artificial Intelligence in Cultural Heritage and Innovative Design Domain*, pp. 421-425. Milan: FrancoAngeli.

Tallis R. (2003). *The Hand. A Philosophical Inquiry in Human Being*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

Ugo V. (2008). *La costruzione geometrica della forma architettonica. Esercizi.* Milan: Maggioli.

Authors
Giovanna Spadafora, Università degli Studi Roma Tre, giovanna.spadafora@uniroma3.it
Michela Ceracchi, Sapienza Università di Roma, michela.ceracchi@uniroma1.it
Antonio Camassa, Consiglio Nazionale delle Ricerche, antonio.camassa@cnr.it

To cite this chapter: Spadafora Giovanna, Ceracchi Michela, Camassa Antonio (2023). I modelli per la Geometria descrittiva: transizioni tra spazio reale e virtuale/Models for Descriptive Geometry: Transitions between Real and Virtual Space. In Cannella M., Garozzo A., Morena S. (Eds.). *Transizioni. Atti del 44° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Transitions. Proceedings of the 44th International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 3189-3206.

 Isbn 9788835155119